1. La variété riemannienne $X = K\backslash G$
2. Formes diff. invariantes
3. Cohomologie des algèbres de Lie

Cadre : G groupe de Lie réel connexe semi-simple, centre fini
K sous-groupe compact maximal
$X = K\backslash G$

Ex : $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} SL_n(\mathbb{R})$ F c.d.n

$G = SL_n(F \otimes \mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R})^{r_1} \times SL_n(\mathbb{C})^{r_2}$

$[F:\mathbb{Q}] = r_1 + 2r_2$

1. $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G) \supset \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$

$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ $B(x,y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}_x \, \mathrm{ad}_y)$

$\mathfrak{p} = \underline{\mathfrak{k}}^\perp \qquad \underline{\mathfrak{g}} = \underline{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{p} \qquad \theta : \underline{\mathfrak{g}} \longrightarrow \underline{\mathfrak{g}}$

$\theta = (\mathrm{id}_{\underline{\mathfrak{k}}}, -\mathrm{id}_{\mathfrak{p}})$

$$0 \to T_e K \longrightarrow T_e G \longrightarrow T_e X \longrightarrow 0$$

$T_e X \simeq \mathfrak{p}$

$B_\theta(x,y) = -B(x,\theta y)$ déf. positive

$X \curvearrowleft G \qquad x \in X, \; x = Kg = Kg'$

$g' = kg, \; k \in K \qquad r_k : x \longrightarrow xk$

<u>Mq</u>: dr_k est une isométrie de $T_e X$

$\mathrm{Ad}(k)$ préserve B_θ

X complet

X est de courbure négative

Courbure sectionnelle : P plan dans $T_e X$

$S \subset X$ surface qui a P comme espace tangent

$K(P) =$ courbure de Gauss de S

Formule : (u,v) base orthonormée de P

$$K(P) = B(\underbrace{[u,v]}_{\in \mathfrak{k}}, [u,v]) \leq 0$$

<u>Thm</u>. X est difféomorphe à $\mathbb{R}^N$

En particulier X est contractile

<u>Dém</u> On montre $\left.\begin{array}{l} K\times\mathfrak{p}\longrightarrow G \\ (k,u)\longmapsto k\exp(u) \end{array}\right\}$ difféo

$\left.\begin{array}{l} \psi : \mathfrak{p}\longrightarrow X \\ u\longmapsto K\exp(u) \end{array}\right\}$ surjective car X complet

Si $k_1\exp(u_1)=k_2\exp(u_2)$ $\quad k_i\in K$, $u_i\in\mathfrak{p}$

Ad $\downarrow$

$\mathrm{Ad}(k_1)\, e^{\mathrm{ad}(u_1)}=\mathrm{Ad}(k_2)\, e^{\mathrm{ad}(u_2)}$

$\mathrm{Ad}(k)$ est orthogonal pour B_θ

$\mathrm{ad}(u)$ est symétrique pour B_θ

Par la décomp. polaire classique $\mathrm{Ad}(k_1)=\mathrm{Ad}(k_2)$

et $e^{\mathrm{ad}(u_1)}=e^{\mathrm{ad}(u_2)}$ donc $\mathrm{ad}(u_1)=\mathrm{ad}(u_2)\Rightarrow u_1=u_2$

Reste à montrer : ψ^{-1} C^∞ i.e. $\det(d\psi) \neq 0$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{p} \arrow[r, "\exp"] \arrow[rr, bend right, "\psi"'] & G \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

$u \in \mathfrak{p}$, $v \in \mathfrak{p}$

$d\psi_u(v) = \, ?$

$$d\psi_u(v) = d\pi \circ dr_{\exp(u)} \circ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad} u)^k}{(k+1)!}(v)$$

$$= \underbrace{dr_{\exp(u)}}_{\text{iso}} \circ d\pi \circ \left(\text{———} \right)$$

k impair $\Rightarrow (\operatorname{ad} u)^k(v) \in \mathfrak{k} \subset \ker(d\pi)$

$$\sum = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{(2k+1)!}(v) \quad \text{avec } T = (\operatorname{ad} u)^2$$

T est symétrique et $B(Tv, v) = -B([u,v],[u,v]) \geq 0$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ v.p. de T ≥ 0

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{(2k+1)!} > 0$$

Rq : $\mathrm{tr}(T) = \sum \lambda_i = B(u,u) > 0$ si $u \neq 0$

$\Rightarrow K$ n'est pas identiquement nulle

② Description de $\Omega_X = \{$f. diff. sur $X\}$

$\pi : G \longrightarrow X$ $\quad \omega \in \Omega_X$, $\tilde{\omega} = \pi^* \omega \in \Omega_G$

(1) $\tilde{\omega}$ est K-invariante à gauche

(2) $\forall X \in \underline{\mathfrak{k}}$, $i(X)\,\tilde{\omega} = 0$

<u>Prop</u> : π^* induit un iso $\Omega_X \simeq \{\tilde{\omega} \in \Omega_G$ vérifiant (1) et (2)$\}$

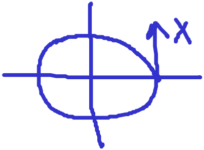
<u>Ex</u>. $G = \mathbb{C}^\times$, $K = U(1)$, $X = \mathbb{R}_{>0}$

$\Omega^1_X = \{ f(r)\,dr,\ f \in C^\infty(X) \}$

$\tilde{\omega} \in \Omega^1_G$, $\tilde{\omega} = f(r,\theta)\,dr + g(r,\theta)\,d\theta$

dr, $d\theta$ sont K-invariants

(1) $\iff$ $\tilde{\omega} = f(r)\,dr + g(r)\,d\theta$



$i(X)\,dr = 0$ $\qquad$ $i(X)\,d\theta \neq 0$

(2) $\iff$ $\tilde{\omega} = f(r)\,dr$

<u>Dém</u> (cas général) : $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$ vérifie (1) et (2) ?

$X \in \underline{\mathfrak{k}}$ $\quad i(X)\tilde{\omega}(v_1, \ldots, v_{q-1}) = \tilde{\omega}(X, v_1, \ldots, v_{q-1})$

$$= \omega(\underbrace{d\pi(X)}_{=0}, d\pi(v_1) \ldots d\pi(v_{q-1})) = 0$$

Supposons que $\tilde{\omega} \in \Omega^1_G$ vérifie (1) et (2).

$x \in X$, $x = Kg$

$$0 \to T_e K \xrightarrow{dr_g} T_g G \xrightarrow{d\pi} T_x X \longrightarrow 0$$

$\tilde{\omega}_g \in \Lambda^q (T_g G)^*$ se factorise par $\Lambda^q (T_x X)^*$

Par (1), cet élément ne dépend pas de g t.q. $x = Kg$

L'espace $I_G = \Omega_X^G$

Notation : pour H ss-gpe de G, $\Omega_X^H = \{\omega \in \Omega_X$ invariantes par H à droite$\}$.

$$I_G \underset{\pi^*}{\simeq} \left\{ \omega \in \Omega_G \text{ vérifiant (1) et (2)} \atop + \text{ invariants par } G \text{ à droite} \right\}$$

$\omega \in \Omega_G$ invariante par G à droite $\Rightarrow$ déterminée par $\omega_e \in \underbrace{\Lambda^q (T_e G)^*}$ (en particulier $\dim I_G < \infty$)

③ Cohomologie d'algèbres de Lie

$\underline{k} \subset \underline{g}$ $\quad C^q(\underline{g}) = \Lambda^q \underline{g}^* \ni f$

C'est un $\underline{g}$-module pour : $\quad \gamma \in \underline{g}$

$$(\gamma \cdot f)(x_1, \ldots, x_q) = \sum_{i=1}^{q} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, \gamma], x_{i+1}, \ldots, x_q)$$

$$d : C^q(\underline{g}) \longrightarrow C^{q+1}(\underline{g})$$

$$(df)(x_0, \ldots, x_q) = \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_q)$$

__Déf__ : $H^*(\underline{g}) = H^*(C^*(\underline{g}))$

Version relative :

$C^*(\underline{g},\underline{k})$ sous-complexe de $C^*(\underline{g})$ formé des $f \in \Lambda^q \underline{g}^*$ qui se factorisent par $\Lambda^q(\underline{g}/\underline{k})^*$ et annulées par $\underline{k}$.

$\forall \gamma \in \underline{k}$, $\gamma \cdot f = 0$

$$H^*(\underline{g},\underline{k}) = H^*(C^*(\underline{g},\underline{k}))$$

Prop. $I_G^* \simeq C^*(\underline{g},\underline{k})$ iso. de complexes compatible au cup-produit

Dém. $(\Omega_G^q)^G \simeq \Lambda^q \underline{g}^*$

$$\begin{array}{ccc} \Omega_G^q & & \Lambda^q \underline{g}^* \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \omega & \longmapsto & f = \omega_e \end{array}$$

ω vérifie (2) $\Longleftrightarrow$ f se factorise par $\Lambda^q(\underline{g}/\underline{k})$

<u>Mq</u>. (1) $\Longleftrightarrow$ f annulée par $\underline{k}$

$$\omega_e \circ \mathrm{Ad}(k) = \omega_e \qquad \forall k \in K$$

On différentie / k.

<u>Prop</u> Les différentielles dans $C^*(\underline{g}, \underline{k})$ sont nulles.

$$\underline{g}/\underline{k} \simeq p \qquad f \in \Lambda^q(p)^*$$

$$u_0, \ldots, u_q \in p$$

$$df(u_0, \ldots, u_q) = \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} f(\underbrace{[u_i, u_j]}_{\in \underline{k}}, \ldots) = 0$$

$\square$.

Corollaire

1) Les formes de I_G sont fermées.

2) $I_G^* \simeq H^*(\underline{\mathfrak{g}}, \underline{\mathfrak{k}})$

$\Gamma \subset G$ sous-groupe discret

$$\begin{tikzcd}
I_G = \Omega_X^G \subset (\Omega_X^\Gamma)^{d=0} \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "j"'] & H^*(\Omega_X^\Gamma) \arrow[d, equal] & \\
 & H^*(\Omega_{X/\Gamma}) = H^*(\Gamma, \mathbb{R}) &
\end{tikzcd}$$

vu plus tard